

Matemática I

Integrais Impróprios

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}$, com $a < b$.
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Vamos ver o que acontece se o intervalo $[a, b]$ não for limitado.

Integrais com Limites Infinitos

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$.

Se existe e é finito $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

O integral diz-se **convergente**.

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe e diz-se **divergente** ou que **diverge**.

Integrais com Limites Infinitos

Seja f uma função contínua no intervalo $] - \infty, b]$.

Se existe e é finito $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ então $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

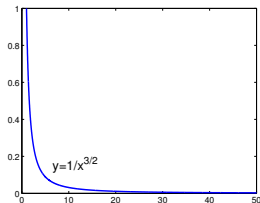
O integral diz-se **convergente**.

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe e diz-se **divergente** ou que **diverge**.

Integrais com Limites Infinitos

Exemplo 1: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^3} \neq 0 \wedge x^3 \geq 0\} =]0, +\infty[$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx}_{=I}$$

$$I = \int_1^b x^{-3/2} dx = \left[\frac{x^{-3/2+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right]_1^b = -2 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^b = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{1}} \right)$$

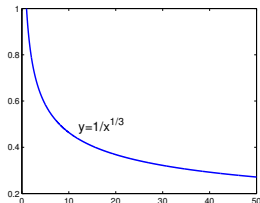
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1 \right) = -2 \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{b}}}_{=0} + 2 = 2$$

O limite existe e é igual 2, logo o integral converge para 2.

Integrais com Limites Infinitos

Exemplo 2: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \neq 0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx}_I$$

$$I = \int_1^b x^{-1/3} dx = \left[\frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_1^b = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{x^2} \right]_1^b = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{1^2} \right)$$

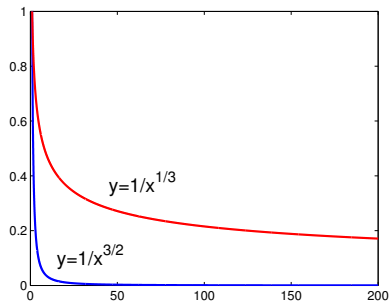
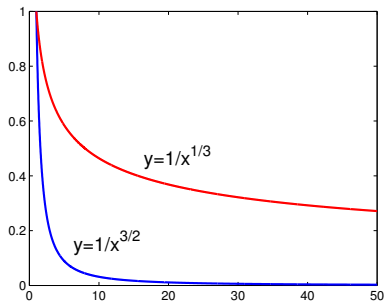
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{b^2} - 1 \right) = \frac{3}{2} \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{b^2}}_{\rightarrow +\infty} - \frac{3}{2}$$

O limite não existe, logo o integral é divergente.

Integrais com Limites Infinitos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{divergente}$$



Seja f uma função contínua no intervalo $] -\infty, +\infty[$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

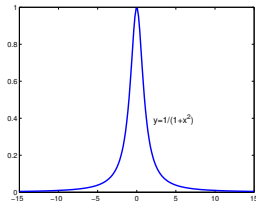
com $c \in \mathbb{R}$.

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.

Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Integrais com Limites Infinitos

Exemplo 3: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctg(x) \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg(b) - \arctg(0)) = \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(b)}_{=\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

O integral converge para $\frac{\pi}{2}$.

Exemplo 3: (continuação)

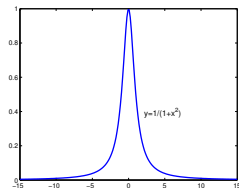
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\arctg(x) \right]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg(0) - \arctg(a)) = 0 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg(a)}_{=-\pi/2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

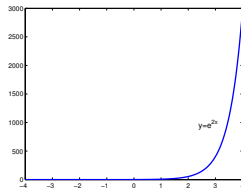
O integral existe e converge para π .

Integrais com Limites Infinitos

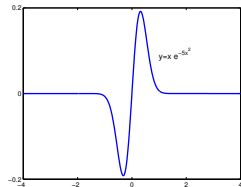
Exemplo 3: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$



Exemplo 4: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} dx$ divergente



Exemplo 5: $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx = 0$



Integrais de Funções Descontínuas

Seja f uma função contínua no intervalo $]a, b]$.

Se existe e for finito $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$ então $\int_a^b f(x) dx$ existe (ou converge) e o seu valor é dado por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

Caso o limite não exista ou seja infinito então o integral não existe (ou diverge).

De modo análogo, se f é uma função contínua no intervalo $[a, b[$, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Integrais de Funções Descontínuas

Seja f uma função contínua em $]a, b[$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{c_1 \rightarrow a^+} \int_{c_1}^c f(x) dx + \lim_{c_2 \rightarrow b^-} \int_c^{c_2} f(x) dx\end{aligned}$$

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.

Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Integrais de Funções Descontínuas

Seja f uma função contínua em $[a, c[\cup]c, b]$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{c_1 \rightarrow c^-} \int_a^{c_1} f(x) dx + \lim_{c_2 \rightarrow c^+} \int_{c_2}^b f(x) dx\end{aligned}$$

O integral é convergente se e só se existirem e forem finitos os dois integrais que figuram no segundo membro da relação.

Se pelo menos um desses limites não existir ou for infinito o integral não existe.

Integrais de Funções Descontínuas

Exemplo 6: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad c = 0$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-1}^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-1}^c x^{-2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_{-1}^c \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^c = \lim_{c \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{-1} \right) = - \underbrace{\lim_{c \rightarrow 0^-} \frac{1}{c}}_{\rightarrow -\infty} - 1 \quad \text{diverge} \end{aligned}$$

O integral I_1 é divergente, logo $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ também diverge.

